Pub. Mat. UAB
Nº 23, Febrer 1981

Com és d'algebraica la Topologia Algebraica?

J. Aguadé

Aquest article presenta una versió pràcticament literal d'una conferència pronunciada el dia 14 d'Abril de 1980 a la Universitat Autònoma de Barcelona. L'audiència estava principalment formada per estudiants que coneixien els rudiments de l'homologia singular. El nivell és, per tant, considerablement elemental. Com que és tracta d'una transcripció literal, he reproduit sense alteració el llenguatge coloquial i les nombroses imprecissions matemàtiques. M'he limitat (i espero que amb això em guanyaré l'agraiment de l'hipotètic lector) a eliminar els acudits dolents i les bromes poc escaients. He afegit una bibliografia comentada.

Què vol dir el títol d'aquesta conferència? Dit amb més precissió, vol dir que vull parlar del problema de la realitzabilitat d'àlgebres de cohomologia. Però, anem per parts i comencem pel principi.

En un principi hi havia l'homologia. Ara bé, l'homologia era una cosa molt complicada. Es tractava d'associar a un espai uns certs invariants numèrics. Ara bé, quan dic espai vull dir varietat diferenciable, compacta, amb una triangulació fixada i amb una orientació dels símplex de la triangulació. Tot plegat, un objecte complex. Doncs bé, a aquest objecte se li associaven uns números anomenats números de Betti i uns altres números anomenats coeficients de torsió. El gran teorema consistia en demostrar que això eren invariants topològics, és a dir, no depenien ni de la triangulació, ni de cap de les altres propietats que complia el nostre espai, sino només de la classe d'homeomorfisme. Tot plegat era una teoria difícil.

S'acostuma a atribuir a E. Noether l'observació de que els números de Betti i els coeficients de torsió no eren altre cosa que els invariants d'un grup abelià finitgenerat. Es a dir, l'homologia, de fet, associa a un espai X una família de grups abelians $H_i(X)$, $i=0,1,\ldots$ Els números de Betti són els rangs d'aquests grups i els coeficients de torsió són això, els coeficients de torsió.

Convé remarcar bé aquest fet, essencialment elemental, però molt simptomàtic i que es repetirà diverses vegades: hom reconeix una realitat subjacent de la que els objectes coneguts només n'havien deixat veure una part. De fet, és essencialment el mateix parlar d'un grup abelià finitgenerat o referir-se únicament als seus invariants que el caracteritzen llevat isomorfisme, però el canvi d'òptica és del tot fonamental: a sota dels números de Betti i dels coeficients de torsió hi havia una realitat més senzilla: una família de grups abelians.

Es sabut que més endavant va venir l'homologia singular, senzillíssima, i tots entenem ben bé què és això de l'homologia: Donat un espai topològic X li associem de manera natural una família de grups abelians, $H_o(X)$, $H_1(X)$, $H_2(X),\ldots$, on $H_o(X)$ és lliure. Tenim un functor que passa de la Topologia a l'Algebra. Estem fent Topologia Algebraica.

Bé, com és d'algebraica la Topologia Algebraica? Vull dir el següent: L'homologia passa dels espais als grups. Obtenim així tots els grups? Dit amb més precissió: Si $A_o, A_1, A_2,\ldots$ és una familia de grups abelians, A_o lliure, existeix un espai X tal que $H_i(X) \cong A_i$, $i=0,1,\ldots$? Aquest és el problema de la realitzabilitat. Observem que és una mena de problemes que apareixen arreu a Matemàtiques: tenim un functor i ens preguntem per la seva imatge. Deixeu-me que posi alguns exemples: A teoria de Galois tenim un functor que associa a cada polinomi irreduible sobre Q un cert grup, el grup de Galois del polinomi. El problema de la realitzabilitat diu: Quins grups son grup de Galois d'algun polinomi? En un altre camp ben diferent, podem associar a cada obert de $\mathbb{R}^n$ l'àlgebra de les funcions diferenciables sobre aquest obert. Quines àlgebres son realitzables, és a dir, quines àlgebres son isomorfes a l'àlgebra de les funcions diferenciables sobre algun obert de $\mathbb{R}^n$? La llista d'exemples de problemes de realitzabilitat podria fer-se molt llarga. Tots estarem d'acord en que es tracta de problemes interessants. En primer lloc, conceptualment, en segon lloc, de cara a les aplicacions.

Després de fer tanta propaganda, anem a veure que el nostre problema té una solució ben trivial: tota familia de grups és realitzable, és a dir, si $A_o, A_1, A_2, \ldots$ és una familia de grups abelians, A_o lliure, existeix un espai X tal que $H_i(X) \cong A_i$, $i = 0,1,2,\ldots$ La demostració és un exercici que apareix proposat tradicionalment a les llistes de problemes del curs en que s'ensenya homologia singular. Tot i això, voldria fer-lo amb detall per tal d'entendre les idees en que es basa, idees que ens han de servir més endavant.

En tot cas, és molt fàcil veure que n'hi ha prou amb, donats n,r trobar un X tal que $H_n(X) \cong Z_r$, $H_o(X) \cong Z$, $H_i(X) = 0$, $i \neq 0,n$. Construirem aquest X explícitament. Prenem una esfera de dimensió n, S^n. Recordem que $H_n(S^n) \cong Z$, $H_o(S^n) \cong Z$, $H_i(S^n) = 0$, $i \neq 0,n$ Adjuntem a S^n una cel.la de dimensió n+1 i posem

$$X = S^n \cup e^{n+1}$$

Hem de dir a través de quina aplicació adjuntem e^{n+1}. Ha de ser una aplicació $f: S^n \to S^n$. Ara bé, resulta que, afortunadament, aquestes aplicacions les coneixem bé: n'hi ha tantes com enters i estan classificades precisament pel seu grau. Doncs bé, adjuntem a S^n una cel.la e^{n+1} a través d'una aplicació $f: S^n \to S^n$ de grau r. Si ara calculem l'homologia de X veiem que dóna el resultat que voliem. Intuitivament és ben clar: tenim un cicle de dimensió n, donat per S^n, però r vegades aquest cicle és una vora: la vora de e^{n+1}, és a dir, és zero a homologia.

O sigui, el problema de la realitzabilitat té solució sempre i és trivial demostrar-ho. Però la història no s'acaba aquí. Afortunadament.

Va venir un dia que hom va inventar la cohomologia, però la cohomologia era una cosa molt complicada i no semblava tenir cap ventatja sobre l'homologia, La cohomologia associa a cada espai topològic X i a cada anell R (per exemple, $R = Z$, Z_p, Q, $\mathbb{R}$) una familia de R-mòduls $H^i(X;R)$, $i = 0,1,\dots$, H^0 lliure. Observem que mentre que l'homologia eren grups abelians, la cohomologia son R-mòduls. D'altra banda, l'homologia és covariant i la cohomologia és contravariant. Venen a ser com si diguéssim el dual un de l'altre.

Podem tornar a plantejar el problema de la realitzabilitat, però ara per a cohomologia: Donada una familia de R-mòduls.... La resposta és la mateixa d'abans i serveix la mateixa demostració. No hi ha cap novetat.(Si R és principal i R-mòduls finit generats).

La novetat apareix sobtadament quan es descobreix un fet sorprenent, misteriós. Alexander i Whitney, d'una manera molt fosca i complexa, aconsegeixen de dotar a la cohomologia d'un producte, és a dir, d'una aplicació bilineal natural

$$H^i(X;R) \times H^j(X;R) \longrightarrow H^{i+j}(X;R)$$

que dota a $\oplus_{i=0}^{\infty} H^i(X;R)$ d'estructura d'anell! La cosa és encara més sorprenent quan es veu que els intents de fer el mateix a l'homologia no arriben a cap solució.

Es altre cop la mateixa història (recordem que E.Noether s'adona de que l'homologia no són números de Betti, sinó grups): la cohomologia semblava només una familia de R-mòduls, però a sota hi havia molt més: una R-àlgebra!

Va ser en Lefschetz qui va esborrar el misteri d'aquest producte. Es ben senzill: Si X és un espai, podem considerar l'aplicació diagonal $d:X \to X \times X$. Aquesta aplicació induirà morfismes a homologia i cohomologia:

$$H_i(X) \xrightarrow{d_*} H_i(X \times X) \longleftarrow H_i(X) \times H_{i-r}(X)$$

$$H^i(X) \xleftarrow{d^*} H^i(X \times X) \longleftarrow H^i(X) \times H^{i-r}(X)$$

on les aplicacions de la dreta es construeixen de manera més o menys algebraica. El producte de cohomologia es defineix composant les dues aplicacions de la fila de baix. Veiem ara ben clar per què tenim un producte a cohomologia i no el tenim a homologia: en un cas podem composar les aplicacions i en l'altre no!

Fem un petit parèntesi. Hem dit que la cohomologia d'un espai és un anell. Això és cert, és clar, però hem d'estar d'acord amb Steenrod amb que mirar la cohomologia com un anell és adoptar una òptica equivocada. Steenrod diu que va ser un error històric. Veiem per què. En primer lloc, el fet de prendre $\oplus H^i(X;R)$ no té cap sentit geomètric, està fet únicament per tal d'adaptar una realitat nova a una idea preconcebuda, la idea d'anell. En segon lloc, donada una classe de cohomologia una característica fonamental és la seva dimensió i això no apareix a l'estructura d'anell. En tercer lloc, si preteniem aplicar la teoria d'anells a la cohomologia anem ben errats perquè s'ha pogut veure que no ens diu absolutament res. Finalment, el producte de la cohomologia és certament no commutatiu, compleix la propietat anomenada anticommutativitat:

$$x \in H^r(X;R) \;,\quad y \in H^s(X;R) \;,\quad xy = (-1)^{rs} yx \qquad (*)$$

que a la pràctica és tan útil com la propietat commutativa.

Feta aquesta reflexió, esterem d'acord en que cal una estructura algebraica més adient. El que realment és la cohomologia és: una R-àlgebra graduada i commutativa, és a dir, una familia $\{M_i\}$ $i \geq 0$, de R-mòduls, amb aplicacions bilineals $M_i \times M_j \to M_{i+j}$ associatives, amb element unitat. A més, també és commutativa. Com pot ser això? Molt fàcil, una R-àlgebra graduada direm que és commutativa si compleix la propietat (*).

Podem ara tornar a plantejar el problema de la realitzabilitat: Sigui A^* una R-àlgebra graduada, commutativa (A^0 lliure). Existeix un espai X tal que $H^*(X;R) \cong A^*$, com a R-àlgebres graduades? Fixemnos que ja hem vist que sempre podem trobar un isomorfisme aditiu, però volem un isomorfisme com a àlgebres. Aquest problema, que està molt lluny d'estar resolt, és el problema de la realitzabilitat d'àlgebres de cohomologia, al qual està dedicada aquesta xerrada.

Havent vist que els grups de cohomologia són sempre realitzables, podem conjecturar que també ho serà l'àlgebra de cohomologia. Fins i tot podem assajar una demostració del mateix estil que la d'abans. Es molt possible (?) que si podem realitzar les àlgebres lliures, i.e. les de polinomis, després poguem fer quelcom semblant al que vàrem fer a la demostració anterior i introduir les relacions convenients per tal d'arribar a l'àlgebra que volem. El cas és que és ben lògic començar per voler realitzar una àlgebra ben senzilla: una àlgebra de polinomis sobre Z en una variable x. Es a dir, posem $A = Z[x]$ i ens preguntem si existeix un espai X tal que $H^*(X;Z) \cong A$. Aquí cal fer una observació important: la cohomologia d'un espai és una àlgebra graduada, per tant, hem de dotar a A d'una graduació. Això es fa dient quin és el grau de x. O sigui que perquè el problema tingui sentit hem d'assignar a x un grau. Com que $x^2 = (-1)^{\mathrm{gr}\,x \cdot \mathrm{gr}\,x}\, x^2$, és evident que el grau de x ha de ser parell. Posem $\mathrm{gr}\,x = 2n$.

Ja d'entrada ens trobem amb uns bons indicis. Designem per CP^n l'espai projectiu de dimensió n sobre els complexos. Considerem ara l'espai $X = CP^\infty$ que és la unió inductiva de tots aquest espais projectius, creixent n. Doncs bé, resulta que $H^*(X;Z) \cong$ $\cong Z[x]$, $\mathrm{gr}\,x = 2$. Si ara fem el mateix substituint el cos C pel cos H dels quaternions, obtenim un espai Y tal que $H^*(Y;Z) \cong Z[x]$, $\mathrm{gr}\,x = 4$. Es a dir, a la "natura" apareixen espais que realitzen $Z[x]$, $\mathrm{gr}\,x = 2,4$. Suposem ara que volem donar una demostració general de que $Z[x]$ sempre és realitzable, sigui quina sigui la dimensió (o el grau, és el mateix) de x. Es assenyat reduir-se primer a un esquelet petit, és a dir, considerar el problema més senzill de trobar un espai X tal que:

i) $H^{2n}(X;Z) = Z.x$;
ii) $H^{4n}(X;Z) = Z.y$;
iii) $x^2 = y$;
iv) $H^i(X;Z) = 0$, $i \neq 0,\ 2n,\ 4n$.

Dit abreujadament, $H^*(X;Z) = Z[x]/x^3$, una àlgebra de polinomis truncada. Per exemple, si $n = 1$, podem prendre el pla projectiu complex com a espai X i si $n = 2$, podem prendre el pla projectiu sobre el cos dels quaternions.

Una possible manera de construir el nostre espai X pot ser la següent: Com que la cohomologia només ha de tenir dos generadors x, y en dimensions $2n$ i $4n$, és natural prendre un espai X construït adjuntant a S^{2n} una cel.la de dimensió $4n$. Es a dir, posem

$$X = S^{2n} \cup e^{4n}.$$

Aleshores, la cohomologia de X compleix les condicions i) ii) iv) anteriors. Respecte a la condició iii), tenim que $x^2 \in H^{4n}(X;Z)$, que està generat per y, per tant,

$$x^2 = H.y$$

on H és un cert enter. Nosaltres voldriem que H fos igual a 1. Ara bé, de què depèn H? H només depèn de l'espai X. I de què depèn l'espai X? Bé, la construcció de l'espai X només depèn d'una elecció: de com adjuntem la cel.la e^{4n} a l'esfera S^{2n}. Segons com realitzem aquesta adjunció H tindrà un valor o un altre. L'adjunció s'ha de fer a través d'una aplicació $f:S^{4n-1} \to S^{2n}$. Veiem ara que hem definit un invariant que associa a cada aplicació $f:S^{4n-1} \to S^{2n}$ un enter (llevat el signe), H(f), que s'anomena l'invariant de Hopf de f. Doncs bé, existeix un espai X que compleix i), ii), iii), iv) si i només si $Z[x]/x^3$, gr x = 2n és realitzable, si i només si existeix una aplicació $f:S^{4n-1} \to S^{2n}$ d'invariant de Hopf igual a 1.

Recordem ara que quan vàrem demostrar que, aditivament, la cohomologia és sempre realitzable, vàrem utilitzar el nostre coneixement de les aplicacions de S^n a S^n. Ara veiem que, altre cop, la realitzabilitat de certes àlgebres de cohomologia està relacionada amb les propietats de les aplicacions entre les esferes. Però aquest és un camp ple, també, de profunds misteris...

El problema està, doncs, plantejat en els següents termes: Per a quins valors de n existeix una aplicació $f:S^{4n-1} \to S^{2n}$ d'invariant de Hopf igual a 1?

Arribats a aquest punt és molt possible que ja estiguem tots ben cansats de realitzabilitat d'àlgebres de cohomologia i del caràcter més aviat abstracte que està prenent tot això. Potser fins i tot els que creien que podia ser interessant saber quines àlgebres són realitzables no es sentin pas gaire motivats davant el problema d'esbrinar si hi ha aplicacions d'invariant de Hopf igual a 1. Ara és, doncs, el moment de dir que el problema de la realitzabilitat té interés perquè tot teorema sobre realitzabilitat té inmediatament conseqüències geomètriques. (Pensem que el fet de que el grup simètric sigui realitzable com a grup de Galois implica que hi ha polinomis no resolubles per radicals). Això és particularment cert per al problema de l'invariant de Hopf igual a 1. Anem ara a plantejar una sèrie de problemes, aparentment no relacionats entre si, i de caràcter totalment geomètric. (Cal aclarir que diem que un problema és geomètric quan el seu enunciat no fa referència a la cohomologia).

Considerem un espai vectorial real $\mathbb{R}^{2n}$. Si n=1,2, l'existència dels números complexos i dels quaternions ens diu que podem dotar $\mathbb{R}^{2n}$ d'estructura de $\mathbb{R}$-àlgebres sense divisors de zero. Encara que no és tan conegut, existeix el que s'anomenen números de Cayley, que no és altra cosa que una $\mathbb{R}$-àlgebra no associativa de dimensió 8. La pregunta és: hi ha altres n per els quals $\mathbb{R}^{2n}$ admet una multiplicació, i.e. una aplicació $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ contínua i sense divisors de zero?. Tenim, doncs,

<u>Problema A</u> Per a quins valors de n, admet $\mathbb{R}^{2n}$ una multiplicació contínua i sense divisors de zero?

Un espai dotat d'una multiplicació amb element unitat es diu que és un H-espai. Els H-espais son objectes molt estudiats avui dia (pensem que, per exemple, tot grup de Lie és un H-espai). Per exemple, la circumferència S^1 és un H-espai, perquè podem considerar S^1 com els números complexos de valor absolut igual a 1 i els podem multiplicar. El mateix passa amb S^3, degut a la multiplicació dels quaternions, i amb S^7, degut a la multiplicació dels ja anomenats números de Cayley.

<u>Problema B</u> Per a quins valors de n admet S^{2n-1} estructura de H-espai?

Una varietat diferenciable M, de dimensió m, es diu que és paral.lelitzable si admet m camps de vectors tangents, ortogonals a cada punt. Per exemple, S^1 és paral.lelitzable perquè admet un camp tangent no nul enlloc.

<u>Problema C</u> Per a quins valors de n és S^{2n-1} paral.lelitzable?

Es ben sabut que a $\mathbb{R}^3$ tenim el concepte de producte vectorial, però no sembla haver-hi res semblant a altres $\mathbb{R}^n$. Podem definir producte vectorial a $\mathbb{R}^n$ com una aplicació continua

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que : i) $u \times v$ és ortogonal a u i a v; ii) $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - \|u.v\|^2$.

Problema D Per a quins valors de n té $\mathbb{R}^{2n-1}$ un producte vectorial?

(nota: podriem allargar molt més aquesta llista de problemes)

Els problemes A,B,C,D són ben geomètrics i no és gens difícil de veure que són equivalents entre ells, és a dir, els valors de n que compleixen algun d'aquests problemes els compleixen tots. D'altra banda, ja hem vist que n=1,2,4 són solucions d'aquests problemes. Es tracta de trobar-ne d'altres o bé de demostrar que no n'hi ha més!

I arribem ara al punt màgic de tota aquesta discusió: Tots aquests problemes geomètrics son equivalents al problema de l'invariant de Hopf 1 i aquest, ja ho hem dit, és equivalent al problema de la realitzabilitat de $Z[x]/x^3$!! Això no és pas gaire difícil de demostrar. Si bé no penso fer-ho amb detall, deixeu-me que doni una idea de com a partir, per exemple, d'una solució del problema B arribem a una aplicació d'invariant de Hopf igual a 1. Suposem que tenim una multiplicació a S^{2n-1}, és a dir, $S^{2n-1} \times S^{2n-1} \to S^{2n-1}$, contínua. Aleshores, considerem l'espai X que s'obté fent $S^{2n-1} \times S^{2n-1} \times [0,1]$ i identificant $(x,y,0) \sim$ $\sim(x,y,0)$, $(x,y,1) \sim (x,y',1)$. Es demostra que X és homeomorf a S^{4n-1}. Sigui Y l'espai que s'obté de $S^{2n-1} \times [0,1]$ identificant $(x,0) \sim (x',0)$ i $(y,1) \sim (y',1)$. Es demostra que Y és homeomorf a S^{2n}. Aleshores, definim $f:X \to Y$ per $f(x,y,t)=(x.y,t)$. Es demostra aleshores que aquesta aplicació f té invariant de Hopf igual a 1.

Veiem ara que és urgent cercar una solució del problema de l'invariant de Hopf 1, és a dir, de la realitzabilitat de $Z[x]/x^3$. O sigui que ara podem oblidar-nos dels problemes geomètrics i concentrar-nos en el problema de si hi ha o no aplicacions d'invariant de Hopf igual a 1.

Arribats a aquest punt hem de començar a sospitar que potser algunes àlgebres no ho son, de realitzables. Però, per què? Hi ha d'haver un motiu. Pensem en Noether i Alexander-Whitney que van descobrir una veritat subjacent oculta. Van demostrar que la cohomologia era més del que semblava. No serà que potser hem passat per alt una certa estructura de la cohomologia? La resposta és si. Hi ha una estructura amagada. El posar de manifest aquesta estructura és un dels passos importants de la història de la Topologia Algebraica i és obra, entre altres, de Steenrod. Anem a veure en què consisteix aquesta estructura.

Sigui R un anell fixat. Una operació cohomologica de tipus (n,m) és una transformació natural

$$H^n(\ ;R) \to H^m(\ ;R).$$

Les operacions cohomològiques poden sumar-se i composar-se. Es clar, doncs, que formen una R-àlgebra que designarem $\mathcal{A}$. Aleshores, aquesta àlgebra $\mathcal{A}$ actua sobre $H^*(X;R)$ de manera evident. Ja tenim l'estructura que estava oculta: la cohomologia no és tan sols una R-àlgebra, sino que és també un mòdul sobre l'àlgebra $\mathcal{A}$ de les operacions.

Tot això que hem dit és bastant trivial i no es veu com pot ajudar-nos en el nostre problema. Ara bé, una cosa és clara: si volem que una certa àlgebra A^* sigui la cohomologia d'un espai, A^* ha d'admetre una acció de $\mathcal{A}$. Podria pensar-se que sempre existeix una tal acció, com a mínim la trivial, però és molt fàcil veure que en molts casos això no és possible. En efecte, suposem $R = Z_2$. Aleshores es compleix $(x+y)^2 = x^2 + y^2$, és a dir, si definim $\theta(x)^2 = x^2$, veiem que θ és una operació de cohomologia, i.e. $\theta \in \mathcal{A}$. Si ara considerem la nostra àlgebra $Z[x]/x^3$ i volem que sigui la cohomologia d'un espai, veiem que ha d'admetre una acció no trivial de $\mathcal{A}$, l'àlgebra de les operacions, també anomenada àlgebra de Steenrod.

O sigui que ara el que cal és conèixer l'estructura de l'àlgebra de Steenrod, $\mathcal{A}$. Aquesta estructura és coneguda i resulta ser complicadíssima. Per tal de que ens poguem fer una idea donaré l'estructura de l'àlgebra de les operacions sobre Z_2. $\mathcal{A}$ és la Z_2-àlgebra graduada generada per elements Sq^i, on Sq^i és una operació

$$Sq^i\colon H^r(\ ;Z_2) \to H^{r+i}(\ ;Z_2)$$

i amb les relacions

$$Sq^a Sq^b = \sum_{j=0}^{[a/2]} \binom{b-1-j}{a-2j} Sq^{a+b-j}\, Sq^j , \quad 0 < a < 2b.$$

En particular, és fàcil veure que aquestes relacions impliquen que els elements Sq^i amb $i=2^j$ també generen $\mathcal{A}$.

Fixem-nos, doncs, en què tenim. Si volem que una certa àlgebra A^* sigui la cohomologia d'un cert espai, ha d'admetre una acció de $\mathcal{A}$. Si a A^* hi ha algun element de quadrat $\neq 0$, $\mathcal{A}$ ha d'actuar no trivialment. Però $\mathcal{A}$ és una àlgebra molt complexa, per tant, el fet d'admetre una $\mathcal{A}$-acció no trivial imposarà un munt de restriccions a A^* i podrem, d'aquesta manera, obtenir moltes demostracions de no realitzabilitat. Amb aquesta idea ens cal només prendre àlgebres, paper i llapis i, utilitzant les relacions anteriors, anar obtenint restriccions sobre aquestes àlgebres. Hi havia, al dessota de la cohomologia, una estructura riquíssima: l'àlgebra de Steenrod.

Comença l'explotació de l'exit. Prenem la nostra àlgebra $Z[x]/x^3$. Suposem que existeix un X tal que $H^*(X;Z) \cong Z[x]/x^3$. Aleshores, tindrem $H^*(X;Z_2) \cong Z_2[x]/x^3$ i, com que $x^2 \neq 0$, operarà no trivialment. Però els elements Sq^i amb $i=2^j$ generen $\mathcal{A}$, per tant, existirà j tal que $Sq^{2^j} x \neq 0$. Ara bé, $Sq^{2^j} x \in H^{\dim x + 2^j}(X;Z_2)$, per tant, $H^{\dim x + 2^j}(X;Z_2) \neq 0$. Però X només té cohomologia $\neq 0$ en dimensions 2n i 4n, per tant, $2n + 2^j = 4n$, d'on resulta que 2n és una potència de 2! Es a dir, si existeix una aplicació d'invariant de Hopf igual a 1, aleshores 2n és una potència de 2.

Es un molt bon resultat, però encara no ens basta. Coneixem aplicacions amb invariant de Hopf igual a 1 només quan n val 1,2,4 i només hem demostrat que no n'hi pot haver quan n no és una potència de 2. Potser hi ha encara una altra estructura subjacent que fins ara hem negligit? La resposta és novament si i en aquest cas el descobriment i explotació de la nova estructura està lligat als noms de J.Adem i J.F. Adams.

D'ençà d'ara cal que el llenguatge es faci molt menys precís perquè els conceptes que apareixen son més complexos. Recordem que una operació de cohomologia és una transformació natural definida a la cohomologia i que pren valors a la cohomologia.

Doncs bé, una operació secundària de cohomologia és una transformació natural definida a algun subgrup de la cohomologia i que pren valors a algun cocient de la cohomologia. Venen a ser "funcions multiformes no definides arreu".

Les operacions secundàries apareixen a partir de les relacions que hi ha a l'àlgebra de Steenrod. Són com si diguéssim (i aquesta noció és pot precissar molt més) el terme següent d'una resolució de l'àlgebra de Steenrod. Si tenim una relació $\Sigma a_i b_i = 0$, on $a_i, b_i \in \mathcal{A}$, aleshores, associada a aquesta relació hi ha una operació secundària ϕ, definida només a ker b_i, és a dir, definida només sobre les classes x tals que $b_i(x)=0$, per a tot i, i que pren valors a $H^*(\ ;R)/\ \Sigma a_i H^*(\ ;R)$.

Novament tenim que si volem que A^* sigui la cohomologia d'un espai, no solament A^* ha de ser compatible amb l'àlgebra de Steenrod $\mathcal{A}$, sinó que també ho ha de ser amb les operacions secundàries. O sigui que, si volem obtenir demostracions de no realitzabilitat, cal conèixer alguna cosa sobre l'estructura de les operacions secundàries. Aquest estudi el realitzà Adams en un llarg i complex treball titulat "On the non-existence of elements of Hopf invariant one", publicat el 1960 als Annals of Mathematics (algun cop he llegit que la publicació d'aquest treball ha estat un dels moments més "gloriosos" de la Topologia Algebraica). Què fa Adams en aquest treball? Demostra de manera laboriosa que si i=1,2,4, l'operació de Steenrod Sq^{2i} admet una descomposició $Sq^{2i} = \Sigma a_j \phi_j$ on a_j són operacions de Steenrod i ϕ_j són operacions secundàries de cohomologia. Veiem ara que això resol el problema de l'invariant de Hopf igual a 1. En efecte, considerem novament un espai X tal que $H^*(X;Z_2) \cong$ $\cong Z_2[x]/x^3$. Havíem vist abans que $Sq^{2n}x \neq 0$. Suposem $n \neq 1,2,4$ aleshores, com que $Sq^{2n} = \Sigma a_j \phi_j$, resulta que hi ha algun j tal que a_j actua no trivialment, per tant, $a_j(x) \neq 0$, però $2n < \dim a_j(x) < 4n$ i això és una contradicció perquè $H^*(X;Z_2)$ només és $\neq 0$ en dimensions 0,2n,4n. Per tant:

i) Si $S^{4n-1} \to S^{2n}$ té invariant de Hopf igual a 1, aleshores $n = 1,2,4$;

ii) Si $Z[x]/x^3$ és realitzable, aleshores, $\dim x = 2,4,8$;

iii) Si S^n és un H-espai, aleshores, $n = 1,3,7$;

iv) Si R^{2n} admet una multiplicació sense divisors de zero, aleshores; $n = 1,2,4$;

v) Si S^n és paral.lelitzable, aleshores $n = 1,3,7$;

vi) Si R^n admet un producte vectorial, aleshores, $n = 3,7$;

atc..

i recíprocament.

Hem vist fins aquí com pot arribar a ser excitant el problema de la realitzabilitat d'àlgebres de cohomologia. Hem vist com la seva història està intimament lligada a la de la Topologia Algebraica i com pràcticament cada avenç important en Topologia repercuteix automàticament sobre el nostre coneixement de quines àlgebres són realitzables. I recíprocament! Finalment només vull dir que la història no acaba pas aquí. Ben al contrari, es pot dir que comença aqui.

A continuació incloeixo una bibliografia comentada sobre el problema de la realitzabilitat d'àlgebres de cohomologia.

Un "survey" excel.lent sobre el tema, del qual el present article pot considerar-se'n un resum, és:

Steenrod, N.E. "The cohomology algebra of a space" L'enseig. Math. 7(1961), 153-178.

La referència standard per a estudiar l'àlgebra de Steenrod és

Steenrod,N.E., Epstein,D.B.A. "Cohomology operations" Annals of Math. Studies. Princeton 1962.

La importància i significat de l'àlgebra de Steenrod es posa de manifest al següent magnífic article:

Steenrod,N.E. "Cohomology operations and obstructions to extending continuous functions" Adv. in Math. 8(1972), 371-416.

També molts llibres de text contenen un tractament de l'àlgebra de Steenrod. L'equivalència entre els diversos problemes que apareixen al present article pot trobar-se a diversos llocs, per exemple al llibre citat de Steenrod-Epstein o a

Hilton,P. "General cohomology theory and K-theory" Cambridge Univ. Press. Lecture Note Series nº 1.

La solució del problema de l'invariant de Hopf igual a 1 es troba a:

Adams,J.F."On the non-existence of elements of Hopf invariant one" Ann. of Math. 72 (1960), 20-104.

Posteriorment han aparegut altres demostracions, per exemple,

Wang,J.S.P. "On the cohomology of the mod-2 Steenrod algebra and the non-existence of elements of Hopf invariant one" Ill. J. Math. 11(1967), 480-490.

Mahowald,M. Milgram,R.J. "Operations which detect Sq^4 in connective K-theory and their applications" Quart.J. Math. 27(1976), 415-432.

La demostració d'Adams és certament molt complexa. Posteriorment es va veure que, utilitzant teoria K, pot donar-se una demostració molt curta i elemental. La referencia original és

Adams,J.F. Atiyah,M. "K-theory and the Hopf invariant" Quart.J.Math. 17(1966), 31-38.

Molts llibres contenen demostracions del teorema de l'invariant de Hopf utilitzant teoria K. Per exemple, el llibre de Hilton abans citat i també el llibre

Atiyah,M. "K-theory" Benjamin 1967.

Immediatament es va plantejar el problema anàleg mòdul $p \neq 2$, és a dir, quan és $Z_p[x]/x^{p+1}$ realitzable? Aquest problema va ser resolt independentment per tres autors, generalitzant els mètodes del treball d'Adams:

Liulevicius,A. "The factorisation of cyclic reduced powers by secondary cohomology operations" Memoirs Amer. Math. Soc. 42 (1962).

Shimada,N. "Triviality of the mod p Hopf invariants" Proc. Japan Acad. 36 (1960), 68-69.

Yamanoshita,T. "On the mod p Hopf invariant" Proc. Japan Acad. 36(1960), 97-98.

S'ha explotat l'àlgebra de Steenrod per a obtenir condicions necessàries de realitzabilitat d'àlgebres de polinomis sobre Z_p. Un bon criteri es troba a

Clark,A. "On $_3$ of finite dimensional H-spaces" Ann. of Math. 78(1963), 193-196.

El cas de dos generadors va ser estudiat per

Nakagawa,R. Ochiai,S. "On the dimensions of generators of a polynomial algebra over the mod p Steenrod algebra". Proc. Japan Acad. 43 (1967), 932-936.

Informació molt completa en el cas p=2 i un nombre arbitrari de generadors, pot trobar-se al següent minuciós estudi:

Sugawara,N. Toda,H. "Squaring operations on truncated polynomial algebras" Japanese J.Math. 38(1969), 39-50.

Un altre criteri:

Papastavridis,S. "Polynomial algebras which are modules over the mod p Steenrod algebra" Bull.Soc.Math. Grèce 17 (1976), 24-27.

El mètode estrenat per Adams -Atiyah d'aplicar teoria K per tal d'obtenir condicions necessàries de realitzabilitat va ser estudiat en profunditat per Hubbuck, que en va saber estreure la màxima informació possible

Hubbuck,J.R. "Two lemmas on primary cohomology operations" Proc.Camb.Phil.Soc. 68(1970)
Hubbuck,J.R. "Generalized cohomology operations and H-spaces of low rank" Trans. Amer. Math. Soc. 141 (1969),335-360.
Hubbuck,J.R. "Finitely generated cohomology Hopf algebras" Topology 9 (1970), 205-210.

També apliquen teoria K a realitzabilitat els següents articles:

Wilkerson,C. "Spheres which are loop spaces mod p" Proc. Amer. Math. Soc. 39(1973), 616-618.
Wilkerson,C. "K-theory operations in mod p loop spaces" Math. Z. 132(1973), 29-44.

Recentment s'ha vist que si en lloc de teoria K apliquem teoria BP arribem a resultats encara millors

Kane,R. "Brown -Peterson operations and Steenrod modules" (apareixerà a Quart. J. Math.).

El cas en que l'anell de coeficients és Q està totalment resolt: el problema de la realitzabilitat té sempre solució afirmativa sobre el cos Q. El treball fundacional en aquesta línia és:

Quillen,D. "Rational homotopy theory" Ann. of Math. 90 (1969), 205-295.

Aquest treball va iniciar tota una nova branca a Topologia, principalment després dels treballs de Sullivan:

Sullivan,D. "Infinitesimal computations in Topology" Publ. I.H.E.S. nº 47.

Si estem interessats només en el problema de la realitzabilitat, podem consultar l'interessant article

Stasheff,J.D. "Rational homotopy-obstruction and perturbation theory" Proceedings, Vancouver 1977, Lecture Notes in Math. 673, Springer 1978.

Una de les idees més brillants a realitzabilitat està continguda al següent treball:

Sullivan,D. "Genetics of homotopy theory and the Adams conjecture" Ann. of Math. 100 (1974), 1-79.

(La versió original és: Sullivan,D. "Geometric Topology, part I: Localisation, periodicity and Galois symmetry" M.I.T. June 1970)

En aquest treball (un dels que més influència han exercit en la Topologia Algebraica del darrer deceni) es demostra (entre altres moltes coses) que si n divideix p-1, l'àlgebra de polinomis sobre Z_p en un generador de dimensió 2n és realitzable. Es a dir, s'obtenen condicions suficients de realitzabilitat. La idea de Sullivan va ser utilitzada a

Cooke,G.E. "Constructing spaces with interesting Z/p-cohomology via ε-actions on loop spaces" Amer,J.Math. 101(1979)

515-542.

i, sobretot, a l'important treball

Clark,A. Ewing,J. "The realisation of polynomial algebras as cohomology rings" Pacific J. Math. 50(1974), 425-434.

En aquest treball es realitzen una familia d'àlgebres de polinomis sobre Z_p.

Al següent treball es realitzen "manualment" certes àlgebres de polinomis com a àlgebres sobre l'àlgebra de Steenrod:

Steenrod,N.E. "Polynomial algebras over the algebra of cohomology operations" H-spaces, Neuchatel 1970. Lecture Notes in Math. 196. Springer 1971.

Recentment, Adams -Wilkerson han posat una nova pedra angular a la història del problema de la realitzabilitat, amb un treball fonamental:

Adams,J.F. Wilkerson,C. "Finite H-spaces and algebras over the Steenrod algebra" Ann. of Math. 111 (1980), 95-143.

En particular, en aquest treball es demostra que si p no divideix les dimensions dels generadors, les úniques àlgebres de polinomis sobre Z_p que són realitzables són les construides per Clark-Ewing. Aquest treball es basa en una idea anterior de Wilkerson

Wilkerson,C. "Classifying spaces, Steenrod operations and algebraic closure" Topology 16(1977), 227-237.

A la llum d'aquests treballs sembla que la determinació de les àlgebres de polinomis sobre Z que són realitzables és, finalment, un problema atacable. Si els generadors tenen dimensions diferents, el problema està resolt:

Aguadé,J. "A note on realizing polynomial algebras" (apareixerà a Israel J. Math.)

El problema de la realitzabilitat d'àlgebres de cohomologia està intimament relacionat amb els grups d'homotopia estable de les esferes. En particular, els següents articles tenen importants aplicacions a realitzabilitat:

Toda,H. "An important relation in Homotopy groups of spheres" Proc. Japan Acad. 43 (1967), 839-842.

Ravenel,D.C. "The non-existence of odd primary Arf invariant elements in stable homotopy" Math.Proc.Camb.Phil.Soc. 83 (1978), 429-443.

Finalment, citem una sèrie de treballs que contenen resultats sobre realitzabilitat:

Hoffman,P. "On the realizability of Steenrod modules" Quart. J. Math.20 (1969), 403-407.

Hoffman,P. "Cohomology realisations of Q[x]" Quart J. Math. 24(1973), 251-253.

Hoffman,P. Zabrodsky,A. "Thin lens spaces" Canad. Math. Bull. 21 (1978), 31-35.

Zabrodsky,A. "Endomorphisms in the homotopy category" (preprint)

Zabrodsky,A. "On the realization of invariant subgroup of π_*X" (preprint)

Cooke,G.E., Smith,L. "Mod p decompositions of coH-spaces and applications" Math. Z. 157(1977), 155-177.

Cooke,G.E., Smith,L. "On realizing modules over the Steenrod algebra" J.P.A.A. 13 (1978), 71-100.

Toda,H. "Note on cohomology rings of certain spaces" Proc.Amer. Math.Soc. 14(1963), 89-95.

Aguadé,J. "The realizability of certain algebras as cohomology rings" Rev. Univ.Santander 2 (1979), 463-464.

Aguadé,J., Zabrodsky,A. "Algebraic and geometric models for H_0-spaces" (preprint)

Aguadé,J., "Cohomology algebras with two generators"(preprint)

Universitat Autònoma de Barcelona.Bellaterra.Barcelona.Espanya.
i
Forschungsinstitut für Mathematik.ETH-Zentrum.Zürich.Schweiz.